(Начало см. на с.31)

Мы учли здесь, что полное время полета равно двум суткам, т.е. $t_N = 2T$ , а $2\pi = 180°$ . А можно, наоборот, $\varphi$ выразить через $\theta$ (рис.2,*б*) – кому что нравится:

$$\varphi = 360° + 4\theta .$$

Осталось взять карту или глобус, нанести на них (карандашом, на всякий случай) траектории обоих самолетов и срочно сообщить в соответствующие диспетчерские службы о своих намерениях – не только о координатах $\theta$ и $\varphi$, но и о времени пролета $t$ над их странами (из формулы ($*$)).

Таким образом, траектория второго самолета в системе координат, связанной с Землей, похожа на «спираль, навитую на сферу». Любопытно, что в прямоугольной картографической проекции Меркатора (об этом замечательном ученом рассказывалось в «Кванте» №6 за 2006 г.) эта прямая пропорциональность между широтой и долготой давала бы прямую линию, что очень удобно для навигации.

И тут штурман второго самолета подумал: интересно, над какими странами мы пролетели бы, если бы (в нарушение инструкции) все время держали постоянную скорость полета относительно Земли? Но решение этой задачи он предоставил бортовому компьютеру, а мы – читателю.

# От простого – к сложному

*В.ЭПШТЕЙН*

Вниманию читателей предлагаются две, казалось бы стандартные, задачи к теме «Идеальный газ». В задачах используются обычные элементы «конструктора»: вертикальная трубка, запаянная с одной стороны; столбик жидкости, отделяющий воздух в трубке от окружающей среды; открытый сосуд с жидкостью. Предлагается исследовать поведение такого «конструктора» при нагревании. И выясняется, что при определенных условиях ситуация выходит за рамки стандартной и наблюдается качественное изменение характера физического процесса.

**Задача 1.** *В вертикальной трубке, запаянной сверху (рис.1), столбик ртути высотой h отделяет область трубки высотой H, заполненную воздухом, от окружающей среды при температуре $T_0$. Внешнее давление составляет $H_0$ мм рт.ст. Определите смещение столбика ртути x при повышении температуры до T.*

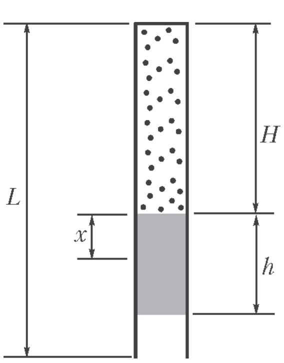


Рис. 1

Введем безразмерные координату и температуру:

$$\xi = \frac{x}{H} \text{ и } \tau = \frac{T}{T_0} .$$

Рассмотрим два случая.

а) Если $H + h < L$, то при изменении температуры давление внутри трубки не меняется. По уравнению изобарического процесса,

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T} ,$$

или, поскольку сечение трубки постоянно,

$$\frac{H}{T_0} = \frac{H + x}{T} .$$

В безразмерных переменных это уравнение примет вид

$$\tau = 1 + \xi , \text{ где } -1 < \xi < 0 .$$

б) Если $H + h = L$, то часть ртути при повышении температуры выливается из трубки, и давление там изменяется. Из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{V_0 p_0}{T_0} = \frac{Vp}{T} , \text{ или } \frac{H(H_0 - h)}{T_0} = \frac{(H + x)(H_0 - (h - x))}{T} .$$

В безразмерном виде это выглядит так:

$$\tau = \frac{1}{\xi_0}(1 + \xi)(\xi_0 + \xi) , \text{ где } \xi_0 = \frac{H_0 - h}{H} .$$

Поскольку в состоянии равновесия $h < H_0$ , то $\xi_0 > 0$ .

На графике на рисунке 2 представлены результаты расчетов. В случае б) (давление в трубке меняется) зависимость $\tau(\xi)$ – квадратичная функция, график которой –

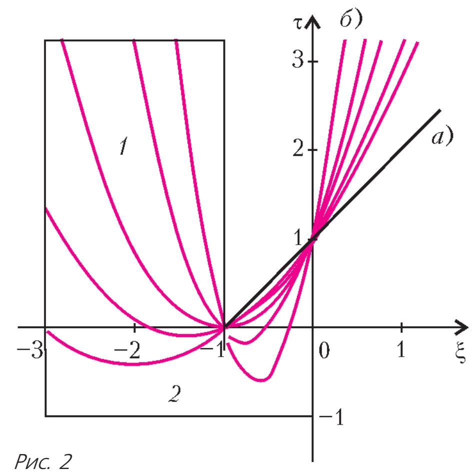


Рис. 2

парабола, пересекающая ось безразмерных координат в точках $\xi = -\xi_0$ и $\xi = -1$. При этом можно выделить две группы парабол, отвечающих условиям $\xi_0 > 1$ и $\xi_0 < 1$.

Значениям $\xi < 0$ соответствует повышение уровня ртути при понижении температуры газа в трубке. Для этого необходим контакт ртути в трубке с ртутью в сосуде с открытой поверхностью (рис.3).

Из графиков видно, что при $\xi_0 < 1$ изобарическая (случай а)) и неизобарическая (случай б)) зависимости различаются существенно. Между тем, качественное различие ситуаций, связанное с возможностью неоднозначной зависимости положения поверхности ртути от температуры, не наблюдается. Область неоднозначности (*1* и *2*) находится вне области допустимых значений безразмерных параметров ( $\tau > 0$ , $\xi > -1$ ).

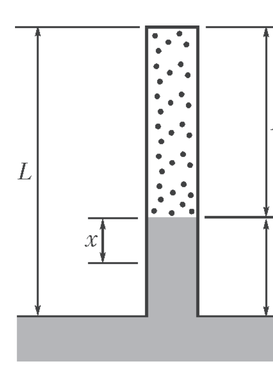


Рис. 3

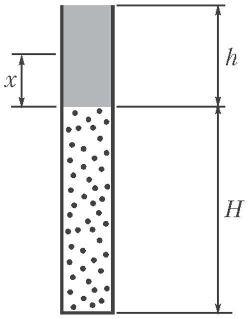


Рис. 4

**Задача 2.** *В вертикальной трубке, запаянной снизу (рис.4), столбик ртути высотой h отделяет область трубки высотой H, заполненную воздухом, от окружающей среды при температуре $T_0$. Внешнее давление составляет $H_0$ мм рт.ст. Определите смещение столбика ртути x при повышении температуры до T.*

При нагревании часть ртути выливается из трубки. Из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{V_0 p_0}{T_0} = \frac{Vp}{T}, \text{ или } \frac{H\left(H_0 + h\right)}{T_0} = \frac{\left(H + x\right)\left(H_0 + \left(h - x\right)\right)}{T}.$$

В безразмерном виде получаем

$$\tau = \frac{1}{\xi_0}\left(1 + \xi\right)\left(\xi_0 - \xi\right), \text{ где } \xi_0 = \frac{H_0 + h}{H}.$$

На рисунке 5 представлены графики зависимости $\tau(\xi)$ для случаев $\xi_0 = 2$, $\xi_0 = 2{,}5$ и $\xi_0 = 3$.

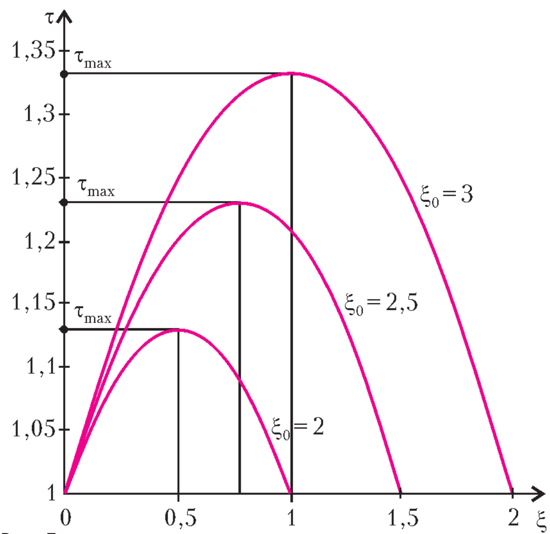


Рис. 5

Расчет и графические представления демонстрируют важное обстоятельство: наличие максимальной температуры газа. Таким образом, появляется возможность сформулировать задачу поиска минимальной температуры, при которой жидкость выльется из трубки. Задачу с таким содержанием (несомненно, «олимпиадного» уровня) можно найти в ряде задачников, а также в журнале «Квант» (см., например, статью Д.Александрова «Газовые законы и механическое равновесие» в «Кванте» №8 за 1990 г.).

Точкам параболы $\tau(\xi)$ отвечают состояния равновесия. Наличие максимальной температуры означает, что при бóльших значениях $\tau$ равновесия быть не может. При нагревании газа уровень ртути повышается. Если остановить нагрев при температуре, которая не достигла указанного максимального значения, прекратится и движение уровня ртути. Максимальному значению равновесной температуры соответствует определенное значение уровня ртути. При сколь угодно малом повышении температуры после достижения максимального значения ртуть выливается *сама*.

Возникает, однако, такой вопрос. Состояниям равновесия отвечают *все* точки кривой механического равновесия, а мы говорим только о той ее части, которая соответствует повышению температуры *до* достижения максимального значения. Почему? Парадоксальность ситуации состоит в том, что другой ветви параболы соответствует *понижение* уровня ртути при *повышении* температуры. Вообще, как это следует из рисунка 5, любому значению температуры, не превышающему максимальное, соответствует не одно, а *два* положения уровня ртути.

Для того чтобы разобраться в этой странной ситуации, построим график зависимости давления на границе жидкости и газа от положения этой границы. Давление со стороны жидкости (ртути) равно

$$p_{\text{рт}} = H_0 + \left(h - x\right).$$

Давление со стороны газа определятся газовым законом

$$\frac{\left(H_0 + h\right)H}{T_0} = \frac{p_{\text{г}}\left(H + x\right)}{T}.$$

Вводя, как и раньше, безразмерные параметры $\tau$ и $\xi$, а также безразмерное давление $\delta = \dfrac{p}{H}$ (напомним, что давление измеряется в мм рт.ст.), получим

$$\delta_{\text{г}} = \frac{\xi_0 \tau}{1 + \xi} \text{ и } \delta_{\text{рт}} = \xi_0 - \xi.$$

Графики этих зависимостей для различных фиксированных температур представлены на рисунке 6 (здесь $\xi_0 = 2$, $\tau_3 = 1{,}05$, $\tau_2 = 1{,}1$, $\tau_1 = 1{,}15$). Изотермам *1*, *2* и *3* соответствуют температуры ниже и выше максимальной соответственно: $\tau_1 > \tau_{max} > \tau_2 > \tau_3$. Состояния равновесия определяются точками пересечения графиков. При повышении

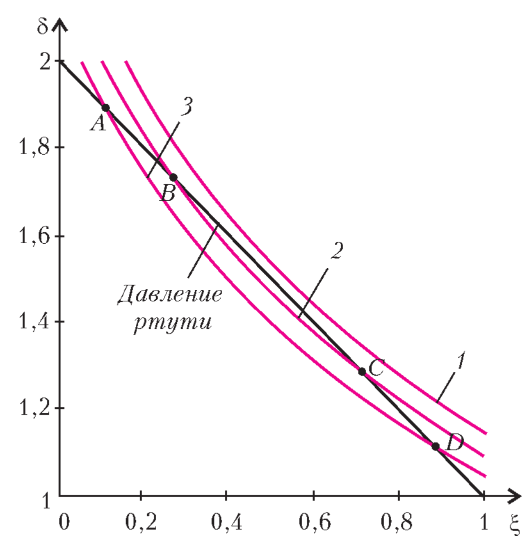


Рис. 6

температуры точки сближаются. Кривая *1* не имеет точек пересечения. Это значит, что при температуре $\tau_1$ равновесие недостижимо. Наличие двух точек пересечения при $\tau < \tau_{max}$ означает, что существуют две точки равновесия. Повышению координаты границы жидкость – газ при заданной температуре соответствует снижение давления как со стороны жидкости, так и со стороны газа. Однако характер снижения давления при переходе через «нижнюю» (точки *A* и *B*) и «верхнюю» (*C* и *D*) точки равновесия различен: при прохождении «нижних» точек давление в жидкости становится больше давления газа, а при прохождении «верхних» точек – наоборот. Это означает, что «нижним» точкам соответствует устойчивое, а «верхним» – неустойчивое положение равновесия.

Положение неустойчивого равновесия вполне достижимо. Если между жидкостью и газом вставить тонкий поршень и измерять усилие, которым необходимо удерживать поршень, то окажется, что как в устойчивом, так и в неустойчивом положении это усилие прикладывать не нужно. Однако добиться того, чтобы ртуть при повышении температуры *сама опускалась* (в соответствии со второй ветвью параболы), невозможно. Находясь в «верхнем» положении равновесия, ртуть либо самопроизвольно выльется из трубки при повышении температуры, либо перейдет в положение устойчивого равновесия (для чего необходимо соединение с резервуаром жидкости, расположенным сверху).

# Размерности и... правило квантования Бора

**Г.БАКУНИН**

Ни для кого не секрет, что не любую концепцию современной физики можно корректно объяснить в школьных терминах. Иногда ситуация складывается еще сложнее – вычисления носят элементарный характер, однако понять мотивацию классиков совсем непросто. Так, например, обстоит дело с формулой Бора для квантования энергетических уровней в атоме водорода. Эта формула безусловно достойна того, чтобы обратить на нее внимание, поскольку позволяет установить связь между законами классической механики и квантовыми идеями. Более того, она является прекрасным примером того, как нетривиальный экспериментальный результат наглядно объясняется с помощью теории.

Еще в 1885 году швейцарский учитель физики И.Бальмер установил, что частоты (или длины волн) всех спектральных линий водорода в области видимого света (серия Бальмера) можно описать одной довольно простой формулой. Несколько позже в спектре водорода были обнаружены серии линий в области ультрафиолета (серия Лаймана) и в области инфракрасного излучения (серия Пашена и др. серии), описываемые аналогичными формулами. Оказалось, что для всех этих линий пригодна общая формула, называемая формулой Бальмера – Ридберга:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2}\right),$$

где $\lambda$ – длина волны излучения, $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга, а $n_l$ и $n_k$ – целые числа. Эта формула являлась в то время научной загадкой.

Включить в теоретическую модель квантовые (целые) числа, опираясь на «планетарную» модель Резерфорда, удалось Нильсу Бору в 1913 году. С формальной точки зрения, новые квантовые вычисления просты, так как в них используются только алгебраические преобразования базовых законов. Однако все не так просто с квантованием момента импульса, использованным Бором для объяснения формулы Бальмера – Ридберга. Выбор этой физической величины для квантования далеко не тривиален. Более того, момент импульса не изучают в школе (разве что факультативно), и во многом это создает методические трудности. Здесь мы рассмотрим, как гипотезу Бора можно обосновать с размерностной точки зрения, которая является полезной и при решении других задач.

Начнем с введения основных величин. Энергию излучаемых фотонов можно рассматривать как результат перехода электрона с одного энергетического уровня на другой:

$$\varepsilon_ф = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{n_l} - E_{n_k},$$

где $h$ – постоянная Планка, $\nu$ – частота излучения, $c$ – скорость света, а $E_n$ – энергия $n$-го уровня. В нашем случае энергия $E$ электрона, движущегося по круговой орбите, складывается из кинетической энергии, равной $\frac{mv^2}{2}$, и потенциальной энергии притяжения электрона к ядру, равной $-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины: скорость электрона $v$ и радиус орбиты $r$. Одну из них можно исключить при помощи уравнения движения электрона по орбите

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Тогда получаем

$$E(r) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Сравним разность энергий электрона на орбитах с радиусами $r_l$ и $r_k$:

$$E_l - E_k = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_k}\right)$$

с энергией фотона, записанной с помощью формулы Бальмера – Ридберга:

$$\varepsilon_ф = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2}\right).$$

Видим, что необходимо введение новой гипотезы для того, чтобы установить связь квантовых чисел $n_l$ и $n_k$ с соответствующими радиусами орбит $r_l$ и $r_k$.

Гипотеза, предложенная Бором в 1913 году, заключается в квантовании момента импульса вращающегося по круговой орбите электрона:

$$mvr = n\frac{h}{2\pi}.$$

Исторической справедливости ради, отметим, что и до Бора предпринимались попытки квантования физических величин, связанных с орбитальным движением. Тем не менее, гениальная интуиция Бора сыграла решающую роль.

Рассмотрим вопрос с размерностной точки зрения, не выбирая заранее, какую величину нужно квантовать. Запишем более общее условие квантования в виде

$$v^\alpha r^\beta = nC_0,$$

где $\alpha, \beta, C_0$ – некоторые постоянные. Заметим, что случай $\alpha = 2$ и $\beta = 0$ ведет к квантованию энергии, выбор $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ характеризует импульс, а комбинация $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ соответствует моменту импульса.