
М
Л
П
Г
Е

Топология графов

В. БОЛТЯНСКИЙ

Часть I. Топология графов

Известный французский математик Андре Вейль сказал как-то, что за душу каждого математика борются «дьявол абстрактной алгебры и ангел топологии». В этой статье, посвященной графам, мы будем прислушиваться в первую очередь к голосу ангела топологии, хотя легкий на помине дьявол тоже скажет свое веское слово.

Граф (конечный) – это множество точек (*вершин* графа), соединенных – на плоскости или в пространстве – конечным числом дуг (*ребер* графа), причем дуги пересекаются только в вершинах (рис.1). В большей части статьи для нас будет важно, что граф – это некоторая фигура (множество всех точек дуг); выделенные точки этой фигуры – вершины – мы будем часто игнорировать.

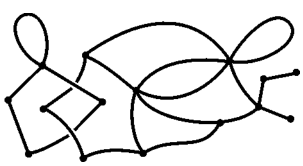

Рис. 1

Какие графы одинаковы?

Ангел топологии считает одинаковыми *гомеоморфные графы* – такие графы G_1 и G_2, для которых существует непрерывное (без разрывов) и обратимое (без склеиваний) отображение $h\colon G_1 \to G_2$ множества G_1 на все множество G_2 (такое отображение называется *гомеоморфизмом* [1]). Из этого определения следует, что два графа гомеоморфны, в частности, если, как угодно изгибая и растягивая ребра, но не допуская разрывов и склеиваний, можно один из них наложить на другой.

[1] *При определении гомеоморфизма произвольных фигур требуется еще непрерывность обратного отображения h^{-1} (для конечных графов она выполняется автоматически, что нам шепнул на ухо без доказательства ангел топологии).*

На рисунке 2,*а* показано, как можно окружность превратить в восьмерку; однако это не означает, что

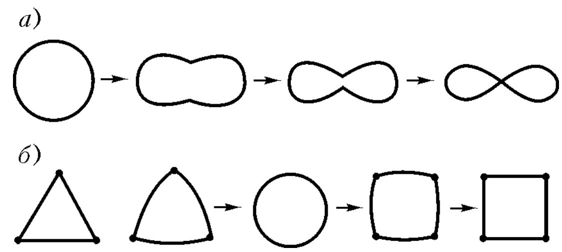

Рис. 2

окружность и восьмерка гомеоморфны (ведь при этом превращении произошло склеивание двух точек). Окружность можно превратить и в полуинтервал, но для этого ее нужно разорвать и лишь потом распрямить. Поскольку разрывы не разрешены, такое превращение не будет гомеоморфизмом; к тому же, полуинтервал не является графом. А вот контур треугольника и контур квадрата гомеоморфны, и оба они гомеоморфны окружности, что показано на рисунке 2,*б*.

Заметим, что не всегда удается реализовать гомеоморфное отображение $h\colon G_1 \to G_2$ изгибанием, растяжением и сжатием графов в самом пространстве. Так, пара зацепленных окружностей (рис.3) гомеоморфна паре незацепленных, хотя в пространстве расцепить их, не разрывая, невозможно.

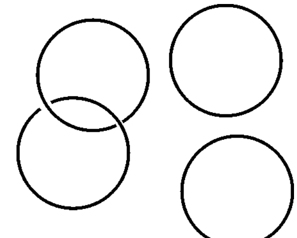

Рис. 3

Как показывает пример с треугольником и квадратом, при гомеоморфизме вершина не обязана перейти в вершину. К этому мы еще вернемся.

Пример 1. Будем представлять буквы русского алфавита в виде линий. Буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита.

Поучительно сравнить понятие гомеоморфизма и понятие конгруэнтности фигур. В геометрии рассматриваются перемещения, т.е. отображения, сохраняющие расстояния между точками. Две фигуры, которые переводятся одна в другую («совмещаются») с помощью перемещения, называются *конгруэнтными* и рассматриваются как одинаковые (с геометрической точки зрения). В топологии рассматриваются отображения

25 апреля 2005 года исполнилось 80 лет замечательному математику, известному педагогу и популяризатору науки, члену Редакционной коллегии и Редакционного совета журнала «Квант» Владимиру Григорьевичу Болтянскому. За тридцать пять лет существования «Кванта» он написал множество превосходных статей по самым разным вопросам математики, входящих, безусловно, в золотой фонд популярной литературы. Мы рады поздравить Владимира Григорьевича с юбилеем и пожелать ему всевозможных успехов на ниве просвещения.

Предлагаемая вашему вниманию статья была опубликована в «Кванте» №6 и 7 за 1981 год.

Иллюстрация Е.Силиной

более общие, чем перемещения, а именно *гомеоморфные отображения*, которые могут не сохранять расстояний, а сохраняют лишь непрерывность расположения точек в фигурах (не допускают разрывов и склеиваний). Поэтому две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые.

Простейшие инварианты

Свойства фигур, которые сохраняются при переходе от фигуры к гомеоморфной ей фигуре, называются *топологическими свойствами фигур, или топологическими инвариантами* (от латинского слова invariant – неизменный). Изучением топологических свойств фигур и занимается топология.

Чаще всего применяют такие топологические инварианты, которые являются числами (или другими алгебраическими объектами), так как с такими инвариантами удобно обращаться. Используются они в основном для решения на первый взгляд безнадежной задачи: доказать, что две фигуры A и B не гомеоморфны.

Действительно, доказывая, что нечто можно построить (у нас – гомеоморфизм h: $A \to B$), достаточно придумать один вариант этого построения. А как доказать, что нечто нельзя построить? Для этого нужно перебрать всевозможные варианты построений (у нас – отображений h: $A \to B$) и проверить, что ни один вариант не годится (не является гомеоморфизмом). Но обычно отображений h: $A \to B$ бесконечно много, всех не проверишь. Как быть?

Здесь и помогают числовые инварианты. Пусть каждой фигуре A рассматриваемого класса приписывается число $q(A)$, причем гомеоморфным фигурам приписывается одно и то же число. Пусть фигуры A и B таковы, что $q(A) \neq q(B)$. Тогда они не могут быть гомеоморфными – нельзя построить гомеоморфизм h: $A \to B$!

Удивительная простота этого рассуждения скрывает его глубину и важность. Создается впечатление, что нас обманули, спрятав неизвестно куда трудность задачи. Это не удивительно: появились инварианты – числа, за которыми скрывается дьявол абстрактной алгебры, большой хитрец и мистификатор.

Пример 2. Буква Ы представляет собой фигуру, состоящую из двух не связанных между собой частей. Большинство остальных букв русского алфавита состоит из одного связного куска (исключение составляют буквы Й, Ё). Число связных «кусков», из которых состоит фигура (говорят также: *число компонент* фигуры), является топологическим инвариантом. Поэтому буква Ы не гомеоморфна, например, букве О, букве П, букве Ц и т.д.

Пример 3. На восьмерке (рис.4,*а*) имеется такая точка x, что после ее удаления (рис.4,*б*) мы получаем несвязную фигуру (содержащую больше одной компоненты). Точку, обладающую этим свойством, называют *разбивающей* точкой фигуры. Никакая отличная от x точка восьмерки не является разбивающей (рис.4,*в*).

а) *б*) *в*)

Рис. 4

Если точка x фигуры A является разбивающей, она остается таковой при любом гомеоморфизме фигуры A; аналогично – для неразбивающей точки. Поэтому число разбивающих точек данной фигуры есть ее топологический инвариант, число неразбивающих точек – также топологический инвариант.

Задачи

1. Для каждой из букв русского алфавита укажите, сколько разбивающих и неразбивающих точек она содержит. Докажите, что буквы О, Г, Т, Ь попарно не гомеоморфны.

2. Докажите, что для любого натурального n существует фигура, содержащая ровно n разбивающих точек, а также фигура, содержащая ровно n неразбивающих точек.

Пример 4. Пусть A – граф и x – его вершина. Число ребер графа A, сходящихся в x, называется *индексом* вершины x в графе A (при этом *петля* – ребро с началом и концом в одной и той же вершине x – считается за два ребра, ибо она входит в x двумя своими концами). На рисунке 5 вершины a, b, c, d имеют индексы 1, 2, 3, 4 соответственно. Число вершин индекса $n \neq 2$, содержащихся в графе, – топологический инвариант. Почему приходится исключать вершины индекса 2?

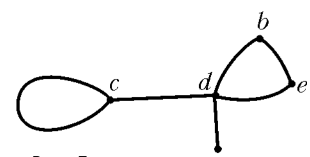

Рис. 5

Задачи

3. Докажите, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что число вершин индекса k ($k \neq 2$) является инвариантом.

4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при выполнении которого фигура, составленная из конечного числа дуг, гомеоморфна окружности.

5. Пусть G – граф. Через $a_k(G)$ обозначим число вершин этого графа, имеющих индекс k. Докажите, что число ребер графа G равно

$$\frac{1}{2}\left(a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \ldots\right).$$

6. Докажите, что во всяком графе число вершин, имеющих нечетный индекс, четно.

Кёнигсбергские мосты

Граф называется *уникурсальным* (или эйлеровым), если его можно «нарисовать одним росчерком», т.е. обойти его весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды. Свойство графа быть уникурсальным является, очевидно, топологическим инвариантом. Однако этот топологический инвариант не является новым, а выражается через понятие индекса вершины (см. далее задачу 9).

Задачи

7. Докажите, что если каждая вершина графа имеет индекс, не меньший двух, то из ребер этого графа можно составить линию, гомеоморфную окружности.

8. Докажите, что если все вершины связного графа имеют четный индекс, то этот граф можно «нарисовать одним росчерком», начав движение из произвольной вершины и возвратясь в ту же вершину.

9. Докажите, что связный граф тогда и только тогда уникурсален, когда он содержит не больше двух вершин нечетного индекса.

С уникурсальными графами связана задача о кёнигсбергских мостах, рассмотренная еще Эйлером. В то время в Кёнигсберге было семь мостов через реку Прегель (рис.6,*а*). Задача состоит в том, чтобы выяснить, можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через

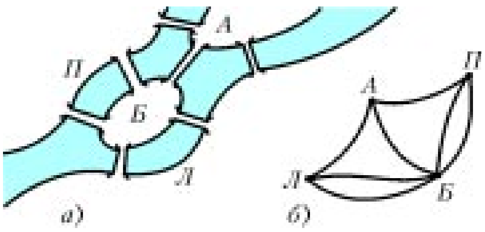

Рис. 6

каждый мост точно по одному разу. Сопоставим с планом города некоторый граф: вершина *Л* обозначает левый берег, *П* – правый берег, *А* и *Б* – острова, а ребра графа соответствуют мостам (рис.6,*б*). В этом графе все четыре вершины имеют нечетный индекс. Следовательно, граф не уникурсален, и потому требуемого маршрута не существует.

Задачи

10. Докажите, что, добавив еще один мост (где угодно на плане рисунка 6,*а*), мы получим схему города, по которому можно пройти через каждый мост ровно по одному разу.

11. *Полным графом* называется граф без петель, у которого любые две вершины соединены ровно одним ребром. В каком случае полный граф уникурсален?

Как построить связный граф

Всякий граф можно «построить», добавляя одно ребро за другим (разумеется, при этом нужно будет отмечать и вершины графа). Нумерация ребер графа на рисунке 7 выбрана так, что при вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы. Если бы, однако, мы занумеровали ребра в обратном порядке, то при вычерчивании у нас сначала получался бы несвязный граф. Оказывается, *во всяком связном графе существует такая нумерация ребер, что при вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы*. Это утверждение можно назвать «теоремой о вычерчивании связных графов».

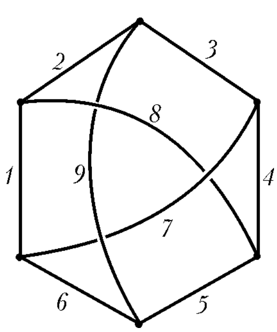

Рис. 7

Задачи

12. Докажите, что любой связный граф можно «нарисовать одним росчерком», если разрешить проходить каждое ребро ровно два раза.

13. Выведите из утверждения предыдущей задачи теорему о вычерчивании связных графов.

14. Докажите, что любые две вершины связного графа G можно соединить в G *простой цепочкой* ребер – такой цепочкой, что объединение ребер этой цепочки представляет собой линию, гомеоморфную отрезку.

Сколько деревьев в лесу?

Контуром в графе называется замкнутая цепочка ребер, объединение которых представляет собой линию, гомеоморфную окружности (рис.8). Связный граф, не содержащий ни одного контура, называется

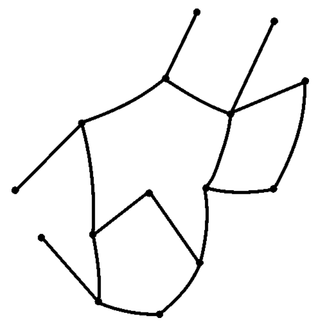

Рис. 8

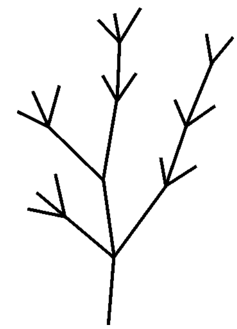

Рис. 9

деревом (рис.9). Докажем, что *в любом дереве число вершин* В *и число ребер* Р *связаны соотношением*

$$\text{В} - \text{Р} = 1. \qquad (1)$$

Для доказательства проведем индукцию по числу ребер Р. При Р = 1 (дерево состоит только из одного ребра и имеет две вершины) соотношение (1) справедливо. Предположим, что для любого дерева, имеющего n ребер, соотношение (1) уже доказано, и пусть G – дерево, имеющее $n+1$ ребро. Так как граф G – связный, его можно получить из некоторого связного графа G' добавлением одного ребра r. Граф G' содержит n ребер и тоже является деревом (почему?). По предположению индукции соотношение (1) для графа G' справедливо, и потому в нем имеется $n + 1$ вершина. Заметим теперь, что только один конец добавляемого ребра r является вершиной графа G' (иначе, в силу задачи 14, при добавлении ребра r в графе G появился бы контур – см. рис. 10). Следовательно, при добавлении ребра r в графе G появляется одно новое ребро и одна новая вершина. Иначе говоря, в графе G имеется $n + 2$ вершины и $n + 1$ ребро, и потому соотношение (1) для него справедливо. Проведенная индукция доказывает равенство (1) для любого дерева.

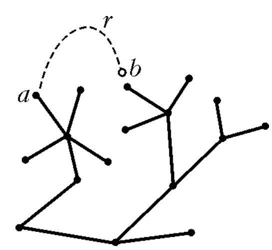

Рис. 10

Разность В − Р называется *эйлеровой характеристикой графа* G и обозначается через $\chi(G)$. Таким образом, равенство (1) означает, что *эйлерова характеристика любого дерева равна 1*.

Задачи

15. Граф, не содержащий контуров, называется *лесом*. Ясно, что если граф G представляет собой лес, то каждая его компонента является деревом. Докажите, что если G – лес, то число деревьев, которые «растут» в лесу (т.е. число компонент графа G), равно $\chi(G)$.

16. Докажите, что если граф G является деревом, то каждые две его вершины могут быть соединены только одной простой цепочкой. Верно ли обратное?

Максимальное дерево и системы токов

Пусть теперь G – связный граф, не являющийся деревом. Тогда в G имеется контур; пусть r_1 – какое-либо ребро, входящее в этот контур (рис.11,*а*). Удалив из G ребро r_1, мы получим связный граф G' (поскольку концы выброшенного ребра соединены в G' простой цепочкой – оставшейся частью контура), причем вершины у графа G' – те же, что и у G. Если G' еще

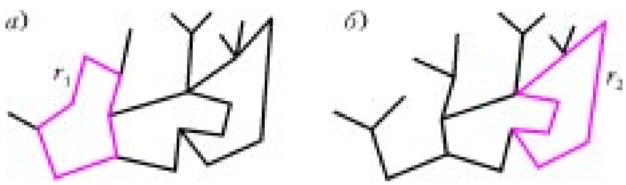

Рис. 11

не является деревом, т.е. в G' также имеется контур (рис.11,*б*), то мы можем взять произвольное ребро r_2 этого контура и, выбросив его, получить связный граф G'' с теми же вершинами, что и у G, и т.д. Так как число ребер конечно, этот процесс должен на каком-то шаге остановиться; иначе говоря, после выбрасывания какого-то ребра r_k мы получим связный граф G^*, содержащий все вершины графа G и уже не имеющий контуров, т.е. являющийся деревом. Граф G^* называется *максимальным деревом* графа G, а ребра $r_1, r_2, \ldots, r_k$, которые пришлось выбросить из G, чтобы получить максимальное дерево G^*, называются *перемычками*.

Если В – число вершин графа G, то максимальное дерево G^* тоже имеет В вершин. Согласно (1), граф G^* имеет В – 1 ребро, и потому число ребер графа G равно В – 1 + k (чтобы из G^* получить G, надо «возвратить» k выброшенных ребер-перемычек). Следовательно,

$$\chi(G) = \text{В} - (\text{В} - 1 + k) = 1 - k. \qquad (2)$$

Так как $k \geq 1$, получаем $\chi(G) \leq 0$. Таким образом, учитывая (1), мы видим, что *для любого связного графа G справедливо соотношение*

$$\chi(G) \leq 1,$$

причем равенство достигается в том и только том случае, когда G – дерево.

Далее, согласно (2), число перемычек равно

$$k = 1 - \chi(G).$$

Задачи

17. Докажите, что если граф G содержит l компонент, то $\chi(G) \leq l$. В каком случае достигается равенство?

18*. Будем говорить, что в графе G задана *система токов*, если каждому ребру приписано направление (указываемое стрелкой) и некоторое неотрицательное число (ток), причем выполняется *правило Кирхгофа*: для каждой вершины сумма входящих в нее токов равна сумме исходящих. Докажите, что если граф является деревом, то в нем существует только *тривиальная* система токов (все токи равны нулю).

19. Пусть G – связный граф, G^* – его максимальное дерево, а $r_1, r_2, \ldots, r_k$ – перемычки (т.е. ребра графа G, не содержащиеся в G^*). Докажите, что если произвольно задать токи на ребрах $r_1, r_2, \ldots, r_k$, то их можно однозначно дополнить токами на остальных ребрах так, чтобы получилась система токов в G.

Указание. Для каждой перемычки r_i существует единственный контур, содержащий ее и не содержащий других перемычек. Если пустить по этому контуру ток такой величины и направления, как указано на перемычке r_i, а затем взять сумму всех этих «контурных токов», то мы и получим требуемую систему токов на графе G. Если бы существовали две различные системы токов, совпадающие на перемычках, то их разность была бы нетривиальной системой токов на дереве G^*.

Часть II. Плоские графы

В этой части статьи речь пойдет о некоторых глубоких свойствах плоских графов. Их изучение потребует вмешательства «дьявола абстрактной алгебры» и одного из его прислужников – инварианта по имени *индекс пересечения*.

Три домика и три колодца

Граф G называется *вложимым в плоскость*, если существует на плоскости граф G', гомеоморфный G. Так, граф, составленный из ребер тетраэдра, и граф, составленный из ребер куба, вложимы в плоскость (рис.12). Приведем два примера графов, не вложимых в плоскость.

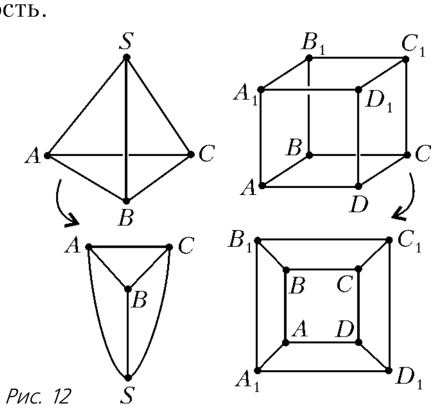

Рис. 12

Пример 5 («домики и колодцы»). На плоскости даны шесть точек: $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ (домики) и $К_1$, $К_2$, $К_3$ (колодцы). Можно ли на плоскости провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу так, чтобы никакие две тропинки не пересекались?

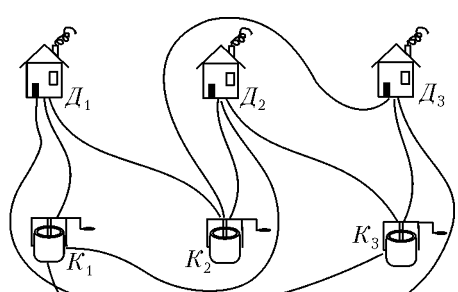

Рис. 13

Если мы проведем все тропинки, кроме одной, то для последней тропинки уже «не будет места» на плоскости. Таким образом, видно, что граф P_1, изображенный на рисунке 13, не вложим в плоскость.

Пример 6. Обозначим через P_2 *полный граф* с пятью вершинами M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, т.е. граф без петель, любая пара вершин которого соединена ребром. На рисунке 14 проведены девять ребер этого графа, а десятое прервано: для него «нет места» на плоскости. Снова видно, что граф P_2 не вложим в плоскость.

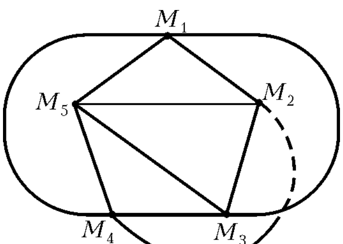

Рис. 14

Оказывается, графы P_1, P_2 действительно не вложимы в плоскость. Разумеется, рассуждения, приведенные в примерах 5 и 6 («нет места» на плоскости), не являются доказательствами. К доказательству мы еще вернемся, а пока, считая невложимость графов P_1 и P_2 в плоскость известной, посмотрим на рисунок 15. На нем показан граф A с выделенным «синим» подграфом. Этот подграф гомеоморфен P_1, значит, граф A не вложим в плоскость (поясните!). Вообще, *если некоторый граф G содержит подграф, гомеоморфный P_1 или P_2, то граф G не вложим в плоскость*. Польский математик Куратовский доказал обратную теорему: *если граф не вложим в плоскость, то он содержит подграф, гомеоморфный P_1 или P_2.*

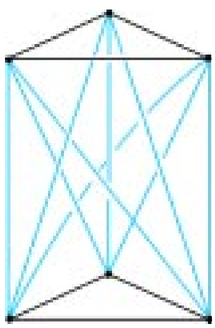

Рис. 15

Мы не будем доказывать теорему Куратовского, а ограничимся доказательством невложимости в плоскость графов P_1 и P_2.

Индекс пересечения

Пусть a, b – два отрезка на плоскости, ни один из которых не содержит концов другого отрезка. Если эти отрезки пересекаются, то будем писать $I(a,b)=1$, а если нет, то $I(a,b)=0$. Число $I(a,b)$ назовем *индексом пересечения отрезков a и b*. Если один из отрезков a, b содержит конец другого отрезка, то число $I(a,b)$ не определено.

Пусть $x=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ и $y=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ – два множества отрезков на плоскости, причем для любых i, j определен индекс $I(a_i,b_j)$.

Если сумма $\sum\limits_{i,j} I(a_i,b_j)$ (т.е. сумма индексов пересечения каждого из отрезков $a_1,\ldots,a_m$ с каждым из отрезков $b_1,\ldots,b_n$) четна, положим $I(x,y)=0$, а если эта сумма нечетна, положим $I(x,y)=1$. Число $I(x,y)$ назовем *индексом пересечения множеств* x и y. Это число будет играть основную роль в этой части статьи.

Будем рассматривать графы, ребра которых являются отрезками. Если в каждой вершине такого графа сходится четное число ребер, мы будем называть его *циклом*. Докажем, что для любых циклов x, y на плоскости, индекс пересечения которых определен, индекс пересечения равен нулю.

По определению, в каждой вершине цикла сходится не меньше двух ребер. Из результата задачи 7 следует, что цикл содержит ломаную, гомеоморфную окружности. Если из цикла выбросить эту ломаную и хоть один отрезок останется, оставшийся граф по-прежнему будет циклом. В оставшемся цикле можно снова выделить ломаную, гомеоморфную окружности, и т.д. Это рассуждение показывает, что *каждый цикл является объединением конечного числа ломаных, каждая из которых гомеоморфна окружности* (причем эти ломаные попарно не имеют общих звеньев).

Поэтому достаточно установить справедливость доказываемого утверждения в случае, когда каждый из циклов x, y состоит из одной ломаной, гомеоморфной окружности. Сдвинув чуть-чуть вершины циклов x и y, мы можем добиться того, чтобы индекс $I(x,y)$ не изменился и никакой отрезок, входящий в цикл x, не был параллелен никакому отрезку, входящему в y. Выберем теперь прямую l, не параллельную ни одной прямой, соединяющей какую-либо вершину цикла x с какой-либо вершиной цикла y, и будем непрерывно перемещать цикл x (как твердое целое) параллельно прямой l (рис.16). Индекс пересечения $I(x,y)$ мог бы изменяться лишь в те моменты, когда вершины движущегося цикла x проходят через ребра неподвижного цикла y или когда ребра цикла x проходят через вершины цикла y (вершины цикла x не могут попасть в вершины цикла y в силу выбора прямой l). Однако, как показывает рисунок 17, в момент, когда некоторое ребро a цикла x проходит через вершину q цикла y, число точек пересечения не меняет своей четности, а потому индекс пересечения $I(x,y)$ не меняется. То же происходит и при прохождении вершин цикла x через ребра цикла y.

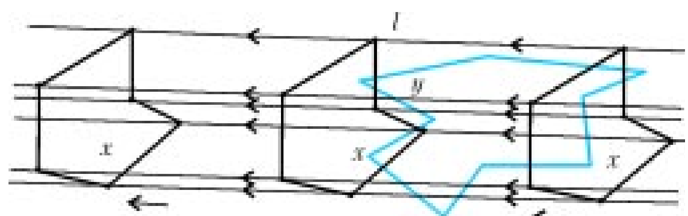

Рис. 16

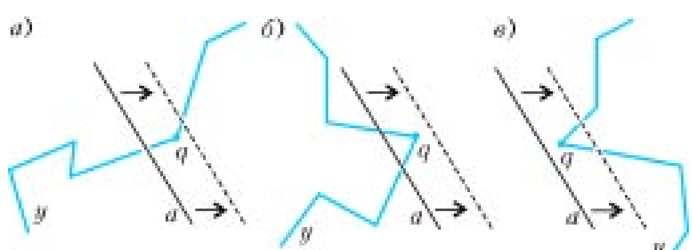

Рис. 17

Итак, в течение всего движения индекс пересечения не меняется, является инвариантом. Но в конце концов цикл x попадает в положение, в котором он совсем не имеет общих точек с y (см. рис.16), так что индекс пересечения становится равным нулю. Следовательно, и первоначально было $I(x,y)=0$.

Невложимость полного пятивершинного графа

Теперь мы в состоянии доказать, что граф P_2, рассмотренный в примере 6, не вложим в плоскость. Соединим ломаными попарно 5 точек на плоскости, не обращая пока внимания на пересечения. Ребра-ломаные, не имеющие общих концов, условимся называть *несмежными*. Обозначим через J сумму индексов пересечения по всем парам несмежных ребер. Конечно, число J зависит от того, каким образом нарисованы на плоскости ребра. Если бы их удалось нарисовать без пересечений, число J оказалось бы равным нулю. Однако мы докажем, что *при любом способе проведения ребер число J оказывается нечетным*. Тем самым будет доказано, что граф P_2 не вложим в плоскость.

Предположим, что мы меняем положение одного ребра, скажем M_1M_2. Первоначальное положение этого ребра обозначим через x, а его новое положение – через x'. Несмежными с ребром M_1M_2 являются три ребра M_3M_4, M_4M_5, M_5M_3. Замкнутая ломаная $M_3M_4M_5$ (возможно, пересекающая себя) является циклом; обозначим его через y (рис.18). Ломаные x и x', вместе взятые, также образуют цикл. Поскольку индекс пересечения любых двух циклов равен нулю:

$$I(x\cup x',y)=0,$$

число точек пересечения ребра x с циклом y (т.е. со всеми несмежными ему ребрами) имеет ту же четность, что и число точек пересечения ребра x' с циклом y.

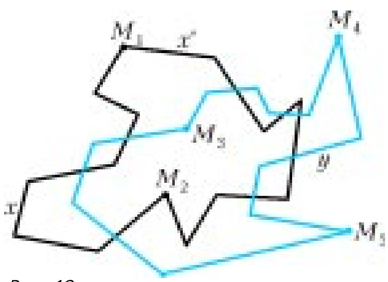

Рис. 18

Таким образом, при замене ребра x ребром x' число J не меняет своей четности.

Из доказанного следует, что *при любых расположениях ребер на плоскости число J всегда имеет одну и ту же четность.* Действительно, если заданы два различных расположения ребер, то, последовательно заменяя сначала одно ребро первого расположения соответствующим ребром второго расположения, затем еще одно, еще одно и т.д., мы постепенно заменим первое расположение вторым, а четность числа J, в силу доказанного, меняться не будет.

Итак, либо для всех расположений ребер число J четно, либо оно для всех расположений нечетно. На рисунке 14 имеется только одна точка пересечения (разумеется, кривые ребра на этом рисунке можно заменить ломаными). Таким образом, на рисунке 14 число J равно единице, а потому для любого расположения ребер оно нечетно, и, значит, P_2 *не вложим в плоскость*.

Задачи

20. Докажите, что граф P_1 из примера 5 не вложим в плоскость.

21. Ребрами графа служат стороны и наименьшие диагонали правильного n-угольника ($n>3$). Докажите, что при четном n этот граф может быть вложен в плоскость, а при нечетном – нет.

22. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали правильного $2n$-угольника. Докажите, что при $n\geq 3$ этот граф не вложим в плоскость.

23. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали (их $2n+1$) правильного $(2n+1)$-угольника. Докажите, что этот граф не вложим в плоскость.

Нельзя ли проще?

Выше (см. рисунки 16, 17) мы доказали, что индекс пересечения любых двух циклов на плоскости равен нулю. Возможно, читатель предложит следующее более простое доказательство: будем двигаться по замкнутой ломаной x; в каждой точке ее пересечения с замкнутой ломаной y мы будем либо входить во внутреннюю область ломаной y, либо выходить из нее во внешнюю область; так как точки входа и точки выхода чередуются, к моменту прихода в исходную точку число точек входа будет равно числу точек выхода; значит, общее число точек пересечения ломаных x и y четно. Однако это доказательство можно признать корректным лишь в том случае, если уже выяснен смысл понятия «внутренняя область», а это понятие вовсе не является таким простым, как кажется на первый взгляд. Выясним смысл этого понятия.

Теорема Жордана

Замкнутая линия, гомеоморфная окружности, называется простой *замкнутой линией*. Теорема Жордана состоит в том, что *всякая простая замкнутая линия, расположенная на плоскости, разбивает эту плоскость на две области* (внутреннюю и внешнюю). Поясним смысл этой теоремы. Пусть l – простая замкнутая линия на плоскости. Возьмем точки p, q, не лежащие на линии l. Если p и q можно соединить ломаной, не пересекающейся с l, то считают, что точки p и q лежат в одной и той же области относительно линии l. Если же любая ломаная, соединяющая точки p и q, обязательно пересекает l, то считают, что p и q лежат в разных областях. Теорема Жордана утверждает, что линия l определяет на плоскости ровно две области.

Не следует думать, что теорема Жордана утверждает нечто совершенно очевидное. Кажущаяся ее «очевидность» объясняется лишь тем, что на ум обычно приходят очень простые линии (окружность, контур выпуклого многоугольника и т.п.). В общем же случае утверждение теоремы Жордана не так уж очевидно. На рисунке 19 изображена простая замкнутая ломаная (это можно проверить, обведя линию карандашом). Однако вовсе не очевидно, что плоскость разрезана этой линией на две области; например, далеко не сразу можно понять,

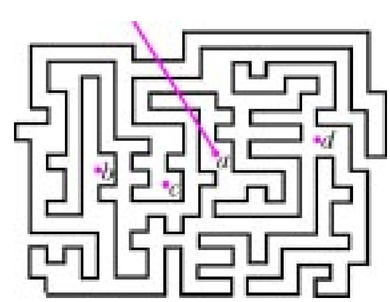

Рис. 19

в какой области (внутренней или внешней) лежат точки a, b, c, d.

Мы приведем доказательство теоремы Жордана, основанное на применении индекса пересечения. При этом ограничимся случаем, когда l – не произвольная простая замкнутая линия на плоскости, а простая замкнутая ломаная.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – последовательные звенья ломаной l. Проведем отрезок, пересекающий звено b_1 в точке a, и возьмем на этом отрезке две точки p, p', расположенные по разные стороны звена b_1 на одном и том же расстоянии от него. Через точку p проведем отрезок, параллельный звену b_1, до точки его пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_1, и b_2 (рис.20). Из этой точки пересечения проведем отрезок, параллельный b_2, до пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_2 и b_3 и т.д. В результате мы

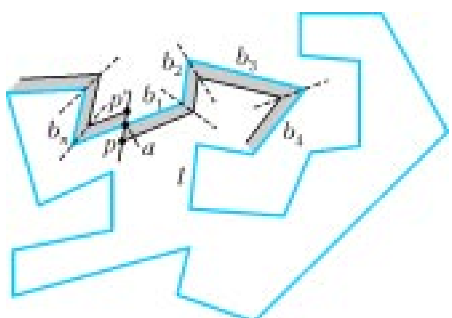

Рис. 20

получим ломаную x, звенья которой находятся на одном и том же расстоянии от соответствующих звеньев ломаной l. Если при этом точка p была взята достаточно близко к a, то построенная линия x не пересекает l и, пройдя вдоль линии l, должна вернуться либо в точку p, либо в p'. Легко понять, однако, что в точку p' ломаная x прийти не может: если бы ломаная x соединяла точки p и p', то, присоединив к x отрезок pp', мы получили бы цикл, который с циклом l пересекается в единственной точке a, т.е. индекс пересечения этих двух циклов был бы равен 1, что невозможно. Итак, x представляет собой замкнутую ломаную, выходящую из точки p, один раз проходящую вдоль ломаной l и возвращающуюся в точку p. Аналогично получается замкнутая ломаная x', выходящая из p', один раз проходящая вдоль ломаной l и возвращающаяся в точку p'.

Пусть теперь c – произвольная точка, не лежащая на линии l. Тогда ее можно соединить, не пересекая l, либо с точкой p, либо с точкой p': достаточно провести из точки c луч, пересекающий линии x, x', и от точки c пройти до первой точки пересечения этого луча с какой-либо из линий x, x', а затем по этой линии дойти до точки p или p'.

Нетрудно понять, что если из точки c проведены две различные ломаные y, z, не пересекающие l и оканчивающиеся в одной из точек p, p', то обе они оканчиваются в одной и той же точке. В самом деле, если бы ломаная y соединяла точки c и p, а ломаная z соединяла точки c и p' (рис.21), то ломаная $y \cup z$ вместе с отрезком pp' составляла бы цикл, индекс пересечения которого с циклом l равнялся 1, что невозможно.

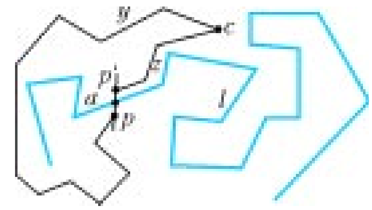

Рис. 21

Теперь уже нетрудно доказать теорему Жордана. Обозначим через U множество всех точек плоскости, которые можно, не пересекая l, соединить с точкой p, а через V – множество точек, которые можно, не пересекая l, соединить с точкой p'. Тогда U и V и будут теми двумя областями, на которые линия l разбивает плоскость. В самом деле, если точки c_1, c_2 принадлежат одной области (скажем, U), то существуют ломаные y_1, y_2, не пересекающие l, которые соединяют c_1 и c_2 с точкой p. Объединение их представляет собой ломаную, соединяющую c_1 и c_2 и не пересекающую l. Итак, две точки, принадлежащие одной области, можно соединить ломаной, не пересекающей l. Если же точки c_1, c_2 принадлежат различным областям ($c_1 \in U$, $c_2 \in V$), то их нельзя соединить ломаной, не пересекающей l (иначе, как и выше, мы получили бы цикл, имеющий с l индекс пересечения 1). Тем самым, теорема Жордана (для случая простой замкнутой ломаной) доказана.

Замечание. Все «далекие» точки плоскости расположены в одной и той же области относительно линии l (рис.22). Поэтому одна из двух областей, определяемых линией l, – неограниченная, а другая – ограниченная. Неограниченную область называют *внешней*, а ограниченную – *внутренней*. Точки внешней области характеризуются тем, что из этих точек можно провести ломаные, не пересекающиеся с l и уходящие как угодно далеко от l; точки внутренней области этим свойством не обладают.

Рис. 22

Задачи

24. Если ломаная l – очень сложная, то определить «на глаз», в какой области (внутренней или внешней) лежит точка a, трудно: для этого нужно выяснить, можно ли, отправляясь из точки a, выйти из «лабиринта», образованного линией l (см. рис.19). Докажите, что если луч, исходящий из точки a и не проходящий через вершины ломаной l, пересекает l в четном числе точек, то точка a лежит во внешней области (т.е. выбраться из «лабиринта» можно), а если в нечетном, то точка a лежит во внутренней области.

25. На плоскости проведены k ломаных линий, каждая из которых соединяет две заданные точки p и q. Докажите, что если других общих точек ломаные попарно не имеют, то плоскость разбита на k областей.