КМШ

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Нет, нельзя. Предположим, репортаж корреспондента журнала «True-False» правдивый. Тогда последний из его собеседников не может быть ни рыцарем, ни лжецом.

2. Так как число и номер месяца не более чем двузначны, то путаница может возникнуть только в том случае, если у Торопыжки получилось трехзначное число без нуля, последние цифры которого 11 или 12, а первая цифра не больше 3. Поскольку в феврале 31-го числа не бывает, то нельзя однозначно восстановить даты, записанные в форме 111, 112, 211, 212, 311. Итак, в году нельзя будет различить 5 пар дат.

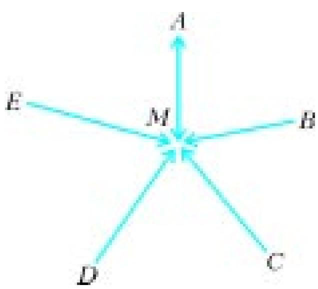


Рис. 1

3. Несложно построить пример, когда к одной норке подходят 5 тропинок (на рисунке 1 стрелки указывают направления прокладывания тропинок, AM = 100 см, BM = = 110 см, CM = 120 см, DM = 130 см, EM = 140 см, все острые углы при вершине M равны 72°).

Это число наибольшее. Если предположить, что к какой-либо норке S подходит более 5 тропинок, то мы придем к противоречию. Действительно, пусть с S соединены норки $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Тогда все лучи $SA_1, SA_2, \ldots, SA_6$ различны и делят полный угол с вершиной S на 6 частей. В треугольнике A_1SA_2 угол A_1SA_2 наибольший как противолежащий большей стороне A_1A_2. Следовательно, $\angle A_1SA_2 > 60°$ (убедитесь в этом). Аналогично в других треугольниках:

$$\angle A_2SA_3 > 60°, \ldots, \angle A_6SA_1 > 60° .$$

Но тогда сумма этих углов будет больше полного угла, чего не может быть.

4. *1-й способ.* Пусть Чичиков купил $Д$ душ по $К$ копеек за каждую. Из условия очевидным образом следуют такие три неравенства:

1) $К^2 > 1000$, 2) $Д^2 > 6000$, 3) $Д \times К \le 2500$.

Из первого неравенства следует, что $К \ge 32$, а из второго – что $Д \ge 78$. Если бы было $К \ge 33$, то тогда $Д \times К \ge 2574$, что противоречит третьему неравенству. Если бы было $Д \ge 79$, то тогда $Д \times К \ge 2528$, что также противоречит третьему неравенству. Поэтому осталась единственная возможность: $К$ = 32, $Д$ = 78, т.е. Чичиков купил 78 душ по 32 копейки за штуку. На всякий случай проверим: $78 \times 32 = 2496$, т.е. 25 рублей, действительно, хватит.

2-й способ. Раскроем шестую главу «Мертвых душ» и прочтем сцену торга Чичикова с Плюшкиным, где так прямо и говорится о 78 купленных беглых душах по 32 копейки за штуку. И даже общая сумма приводится: 24 рубля 96 копеек – Чичиков был в арифметике силен.

5. Замечаем, что диаметров окружности, оба конца которых красные, существует столько же, сколько диаметров, оба конца которых синие. Каждый прямоугольный треугольник, все вершины которого синие, имеет гипотенузу, являющуюся диаметром окружности с синими концами. Для каждого такого диаметра существует 48 прямоугольных треугольников, все вершины которых синие. То же самое справедливо и для прямоугольных треугольников, все вершины которых красные.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Для однозначных чисел y, очевидно, подходят варианты x = 1, y = 1; x = 4, y = 2; x = 9, y = 3. Докажем, что других решений нет. Пусть $z = \overline{x\ldots x}$ – n-значное число, n > 1. Имеем $x \ne 2$, 3, 7, 8, так как квадраты целых чисел на эти цифры не оканчиваются. Далее, y^2 при делении на 4 дает остаток 0 или 1. Поэтому $x \ne 1$, 5, 9 (остаток 3), 6 (остаток 2). Наконец, если x = 4, то $\frac{z}{4}$ тоже квадрат – и мы опять в условиях случая x = 1.

17. В плоскости ломаной введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть вершины ломаной в этой системе задаются такими координатами: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$, $E(x_5,y_5)$, $F(x_6,y_6)$, $G(x_7,y_7)$, $H(x_8,y_8)$, $K(x_9,y_9)$, $L(x_{10},y_{10})$. Воспользуемся тем, что абсцисса (ордината) середины отрезка находится как среднее арифметическое абсцисс (ординат) его концов. Запишем систему равенств, связывающих абсциссы вершин ломаной в соответствии с условием задачи:

$$x_1 + x_2 = x_6 + x_7,$$
$$x_2 + x_3 = x_7 + x_8,$$
$$x_3 + x_4 = x_8 + x_9,$$
$$x_4 + x_5 = x_9 + x_{10}.$$

Вычтя второе и четвертое уравнения этой системы из суммы первого и третьего, получим

$$x_5 + x_6 = x_1 + x_{10}.$$

Аналогично выводится уравнение для ординат:

$$y_5 + y_6 = y_1 + y_{10}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение задачи.

18. Обозначим $НОД(a,b) = x$, тогда $a = xy$, $b = xz$, $НОД(y,z) = 1$. Пусть также $НОД(x,z) = m$, тогда $x = mu$, $z = mv$, $НОД(u,v) = 1$. При этом $НОД(y,v) = НОД(y,m) = 1$. По условию задачи $x(y-z) = yz$, или

$$u(y - mv) = yv, \qquad (*)$$

откуда $uy = umv + yv$. Так как y и u взаимно просты с v, а правая часть последнего выражения делится на v, то v = 1. С учетом этого равенство $(*)$ перепишем в виде

$$(u-1)(y-m) = m.$$

Поскольку y и m взаимно просты, то отсюда получаем $u - 1 = m$, $y - m = 1$. Следовательно,

$$НОД(a,b) = x = mu = m(m+1),$$
$$НОК(a,b) = xyz = m(m+1)\cdot(m+1)\cdot m = НОД^2(a,b).$$

19. Решение этой задачи см. в статье И.Акулича «Треугольники на шахматной доске» в «Кванте» №3.

20. Заметим, что наибольшая разность не может быть меньше 2 (клетка, где записано число 1, имеет четырех соседей). Покажем, что существует такая расстановка чисел, при которой эта разность в точности равна 2. Разобьем плоскость горизонтальной и вертикальной жирными линиями на 4 «угла»: юго-западный, северо-восточный, северо-западный и юго-восточный, как на рисунке 2.

…										…
…					8	9				…
…				8	6	7	9			…
…			8	6	4	5	7	9		…
…		8	6	4	2	3	5	7	9	…
…	9	7	5	3	1	2	4	6	8	…
…		9	7	5	3	4	6	8		…
…			9	7	5	6	8			…
…				9	7	8				…
…					9					…
…										…

Рис. 2

А далее просто опишем порядок заполнения числами каждого угла.

1) В угловую клетку юго-западного угла помещаем число 1, в две соседние с ней – числа 3, в три соседние с ними – числа 5 и т.д. Так как все последующие числа отличаются от предыдущих на 2, то разность между соседними числами не больше 2 (забегая вперед, скажем, что то же будет верно и для остальных углов). Также из принципа расстановки чисел следует, что каждое число $2m + 1$ (для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$) присутствует в углу ровно $m + 1$ раз.

2) В угловую клетку северо-восточного угла помещаем число 3, в две соседние с ней – числа 5, в три соседние с ними – числа 7 и т.д. Здесь каждое число $2m + 1$ присутствует в углу ровно m раз.

Всего, таким образом, в этих двух углах каждое число $2m + 1$ присутствует ровно $(m + 1) + m = 2m + 1$ раз.

3) Северо-западный и юго-восточный углы заполняются одинаково: в угловую клетку записывается число 2, в две соседние с ней – числа 4, в три соседние с ними – числа 6 и т.д. Здесь каждое число $2m$ (для всех $m = 1, 2, \ldots$) присутствует в углу ровно m раз, а в двух углах вместе – $2m$ раз.

Итак, каждое число встречается на доске столько раз, каково это число. Кроме того, в пределах каждого угла разность между соседними числами не превышает 2 (более того – она всюду как раз равна 2). Осталось убедиться, что разность между соседними числами в соседних углах (вдоль «швов») также не превышает 2. Оказывается, действительно не превышает – она всюду равна 1. В самом деле, рассмотрим, например, границу между юго-западным и северо-западным углами (луч, уходящий влево). В соответствии с правилами расстановки чисел, в клетках *под границей* справо налево записаны числа 1, 3, 5, …, а в клетках *над границей* – числа 2, 4, 6, …, т.е., действительно, числа в соседних клетках различаются на 1. Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных границ.

КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

1. $W_{\text{т}} = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{2R_1(R_1 + R_2)}$. **2.** $I_{\max} = U_0\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{L(C_1 + C_2)}}$.

3. $U_{\max} = I_0\dfrac{L_1 + L_2}{\sqrt{C(\mu L_1 + L_2)}}$. **4.** $Q_{\max} = 4\pi\varepsilon_0 R\mathcal{E}$.

ТОЧКА ВНУТРИ ОКРУЖНОСТИ

1. $\dfrac{5\pi}{6}$ или $\pi - \arcsin\dfrac{1}{4}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\dfrac{2pr}{\sqrt{p^2 - 4pr}}$.

4. $\dfrac{4}{3}R^2\sin\gamma$. **5.** $\dfrac{9}{200}p^2$. **6.** 4.

7. 55. **8.** $\sqrt{\dfrac{1110\left(2 - \sqrt{3}\right)}{\pi}} < 10$. **9.** $\dfrac{153\sqrt{35}}{560}$.

LXVIII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Математический праздник

6 класс

1. Валентин пробегает $50 \times 60 = 3000$ см за 100 с, т.е. его скорость равно 30 см/с, или 18 м/мин.

2. Количество рублей, потраченных Андреем при покупке билета у шофера, делится на 5; на 5 делится и общее количество потраченных в январе рублей. Значит, и в дни, когда билет покупался у кондуктора за 11 руб., общее количество потраченных денег делится на 5. Поэтому на 5 делится количество таких дней. Единственный подходящий вариант – 5 дней. Тогда билет покупался у шофера $(115 - 11 \times 5)/15 = 4$ раза, а кружок был 9 раз.

3. а) Лиса должна разложить конфеты так: 10, 10 и 80. Если ей достанется кучка из 80 конфет, то медвежатам достанется поровну. Если ей достанется кучка из 10 конфет, то, чтобы уравнять доли медвежат, ей придется съесть еще 70 конфет.

Примечание. Это единственный возможный способ действий лисы. В самом деле, поскольку в итоге лиса съест 80 конфет, то медвежата съедят по $(100 - 80)/2 = 10$ конфет. Так как у одного из медвежат количество конфет не менялось, то ему досталось по жребию 10 конфет. Если кучка из 10 конфет лишь одна, то она по жребию может достаться лисе, и среди двух оставшихся не будет кучки из 10 конфет. Значит, имеются две такие кучки, а тогда в третьей – 80 конфет.

б) Нет, не может. В самом деле, в итоге медвежата съели поровну конфет, поэтому в сумме они съели четное число конфет. Так как 100 – четное число, то лиса также съела четное число конфет.

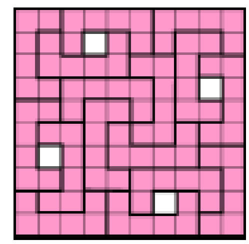


Рис. 3

4. Можно разместить 16 «скобок» (рис.3), а 17 «скобок» занимают уже 102 клетки.

5. Нет, не могут. Использованы 10 различных букв, поэтому каждая цифра обозначена какой-нибудь буквой, в том числе и ноль. Следовательно, произведение цифр какого-то (а значит, и другого) числа равно нулю, а тогда в записи обоих чисел есть ноль. В словах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ общие буквы М, Л и О, но М и Л стоят в начале чисел. Значит, ноль обозначен буквой О. Так как в числе МИХАЙЛО на конце ноль, то оно четное.

6. Того, про кого сказали, что он хоббит, для удобства назовем Бобом. Боб не согласился с тем, что он хоббит, следующий не согласился с ним, т.е. подтвердил, что Боб хоббит, и все говорящие через раз подтверждали или отрицали, что Боб хоббит.

а) Если пирующих было 9 (нечетное число), то на следующем круге каждый говорил противоположное тому, что сказал на предыдущем, так что все они хоббиты.

б) Так как 10 – четное число, то говорящие на каждом круге говорят одно и то же, поэтому хоббитов среди них нет. Тогда и Боб не хоббит, и его правый сосед солгал, т.е. он гоблин. Сам же Боб уличил гоблина во лжи, так что он эльф. Его сосед слева снова гоблин, и так далее – за столом сидят, чередуясь, пять гоблинов и пять эльфов.

7 класс

1. Во вторник Петя обменял свои рубли на 6 тугриков и получил за них в среду 36 рублей. В пятницу он обменял полученные рубли на 9 тугриков и получил за них в субботу 54 рубля.

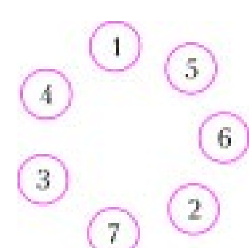


Рис. 4

2. а) Да, см. рис.4. б) Нечетное число не делится на четное, а потому не может стоять между числами одинаковой четности. Значит, нечетные числа стоят парами. Однако среди чисел 1, 2, …, 9 нечетных чисел пять, так что их нельзя разбить на пары.

3. Пример изображен на рисунке 5.

4. а) и б) Квадратик не мог иметь общий угол с прямоугольником, так как тогда периметр остался бы прежним или уменьшился, а площадь уменьшилась бы. Значит, квадрат

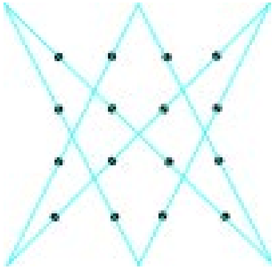


Рис. 5

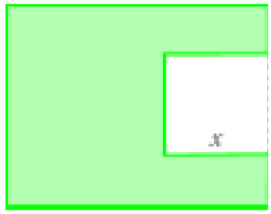


Рис. 6

примыкает только к одной из сторон прямоугольника (рис.6). Пусть сторона квадрата x. Тогда Таня, вырезав квадрат, уменьшает площадь фигуры на x^2, а периметр увеличивается на $2x$. По условию исходная площадь равна периметру полученной фигуры, а исходный периметр равен площади полученной фигуры. Значит, $x^2 = 2x$, откуда $x = 2$.

в) Пусть стороны прямоугольника m и n. Тогда из решения п. а) следует, $mn = 2m + 2n + 4$, что равносильно $(n - 2)(m - 2) = 8$.

Поскольку m и n превосходят 2, задача сводится к поиску разложений числа 8 на два натуральных множителя.

Получаем, что прямоугольники могли быть только такие, как на рисунке 7, т.е. 4×6 или 3×10.

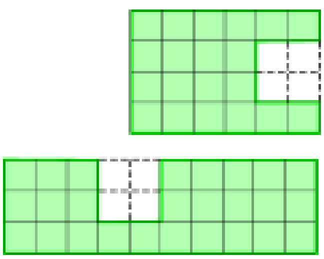


Рис. 7

5. $250 \times 984 + 615 = 2005 \times 13$. При $Л \le 7$ левая часть не превосходит

$$250 \times 800 + 1000 = 201000,$$

а правая не меньше $250 \times 102 = 204510$. Значит, Л = 8 или 9.

Если $ГОД \ge 124$, то число в правой части не меньше

$$2005 \times 124 = 248620,$$

а в левой части – не больше

$$250 \times 987 + 1000 = 247750.$$

Значит, $ГОД \le 123$ и Г = 1, а потому О = 0 или О = 2.

Выражение в правой части и число 250 делятся на 5, поэтому либо У = 5, либо У = 0. Но если У = 0, то правая часть оканчивается нулем и потому четна, а значит, Д четно. При этом О = 2 (так как $О \ne 0$), и минимальное значение Д равно 4, т.е. $ГОД \ge 124$. Противоречие. Значит, У = 5 и потому Д нечетно.

Для цифры Д возможны значения Д = 3, Д = 7 и Д = 9. При делении на 50 слева будет остаток 15 (так как Г = 1 и У = 5). Он должен быть таким же справа, откуда Д = 3.

Допустим, что О = 0. Тогда справа получаем $2005 \times 103 = 206515$, а значит, цифра Т четна (иначе в разряде десятков слева не получится единицы). При этом $Л \ge 8$, $Е \ge 2$ (остальные цифры заняты), и либо $М \ge 6$, либо М = 4 и $Т \ge 6$, и правая часть оказывается меньше левой. Значит, О = 2.

Имеем ГОД = 123. Случай Л = 8 не годится (слишком мало), остается Л = 9. По тем же соображениям $Е \ge 8$, а так как цифра 9 занята, то Е = 8. Далее легко видеть, что Т = 4 и М = 6.

6. Пусть x – число людей, вышедших на митинг. С одной стороны, каждой реформой недовольно ровно 48 жителей, и общее число «недовольств» равно $48 \times 5 = 240$. С другой стороны, каждый вышедший на митинг недоволен хотя бы тремя реформами. Поэтому $240 \ge 3x$, откуда $x \le 80$.

Приведем пример, когда на площадь выйдет ровно 80 человек. Выберем среди жителей острова 80 человек и разобьем их на пять групп по 16 человек. Пусть против первой реформы возражают люди из первых трех групп, против второй – люди из второй, третьей и четвертой групп, против третьей – из третьей, четвертой и пятой групп, против четвертой – из четвертой, пятой и первой групп, а против пятой – из пятой, первой и второй групп. Против каждой реформы возражают ровно $3 \times 16 = 48$ человек, т.е. условие задачи выполнено. На митинг выйдут все выбранные 80 человек.

Избранные задачи старших классов

1. Пусть разрез проходил вертикально. Проведем во всех квадратиках 1×1 вертикальные отрезки, соединяющие середины противоположных сторон (рис.8). При сгибании по линиям клеток эти отрезки накладываются друг на друга. Следовательно, разрезаются они и только они. Нетрудно подсчитать, что при этом получается 9 частей.

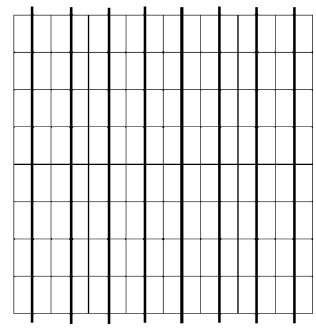


Рис. 8

2. Так как AA' и BB' – высоты, то треугольники $AA'B$, $AB'B$, $CA'H$ и $CB'H$ прямоугольные (рис. 9). Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, то

$XA' = 1/2\ AB = XB'$ и $YA' = 1/2\ CH = YB'$.

Следовательно, точки X и Y лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $A'B'$.

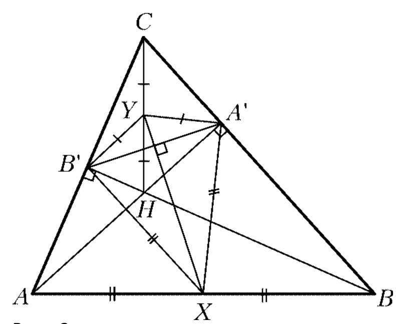


Рис. 9

3. Если после выкидывания каких-то двух соседних чисел сумма оставшихся нечетна, то их нельзя разбить на две группы с равной суммой. Если же такая сумма всегда четна, то суммы любых двух соседних чисел имеют одинаковую четность. Тогда числа, стоящие через одно, имеют одинаковую четность. Но так как на круге нечетное количество чисел, то все они одинаковой четности.

Если все числа нечетны, то сумма 2003 из них нечетна, и их нельзя разбить на две группы с равной суммой. Если же все числа четны, то уменьшим каждое из них вдвое. Если снова все числа четны, то снова уменьшим их вдвое, и т.д. На каком-то шаге получится нечетное число. По доказанному можно теперь выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся нельзя разбить на две группы с равной суммой. Остается выкинуть соответствующие два числа из исходного набора чисел.

4. Разобьем окружность с центром в точке O на шесть равных частей точками A, B, C, D, E и F. Проведем дугу окружности с центром в точке A радиуса AB от точки B до точки O (рис.10). Проведем аналогичные дуги с центрами в точках B, C, D, E, F. Каждую из полученных 6 частей круга разобьем на две равные части одним из способов, изображенных на рисунке.

Комментарий. Данная задача приоткрывает дверь в волшебный мир открытых проблем современной геометрии. Укажем некоторые направления возможного исследования:

1) Круг разделен на 12 равных частей так, что центр лежит на границе некоторых, но не всех частей. Верно ли, что части равны частям, получающимся при одном из разрезаний, указанных в решении?

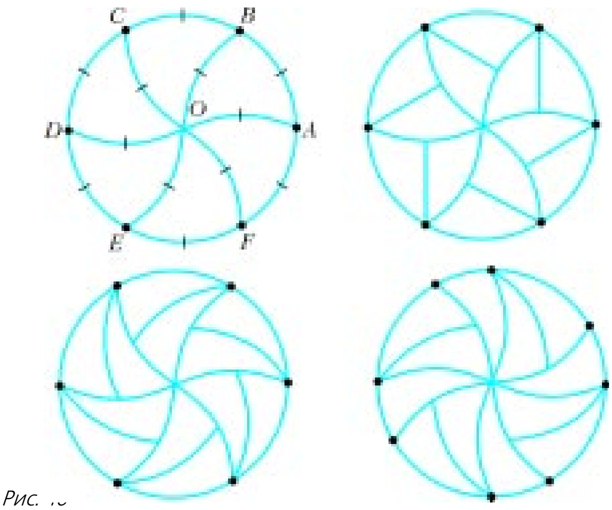


Рис.

2) При каких n круг можно разделить на n равных частей так, чтобы центр лежал на границе некоторых, но не всех частей? (Пример известен лишь при n вида $6k$, $k \geq 2$; недавно А.Канель-Белов доказал, что при $n = 2$ такое деление невозможно.)

3) Круг разделен на несколько равных частей. Верно ли, что диаметр каждой из частей (наибольшее из расстояний между ее точками) не меньше радиуса круга?

4) Можно ли разделить круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга лежал строго внутри (не на границе) одной из частей? Ответ на этот вопрос не известен не только для круга, но и для правильных n-угольников при $n > 4$.

5) Аналогичные вопросы можно поставить про шар в пространстве. Там не известно ни одного ответа (в том числе и на вопрос, аналогичный поставленному на олимпиаде).

5. Возьмем числа 1, 2 и 3. Сумма любых двух из них делится на третье, причем одно из этих чисел равно сумме двух других. Добавим к этим числам еще одно – их сумму. Затем к полученному набору добавим его сумму и т.д. Нетрудно показать, что на каждом шаге каждое из чисел набора делит сумму остальных. Проделав описанную операцию нужное количество раз, получим искомый набор: 1, 2, 3, 6, 12, 24,… …, 3×2^{2003}.

6. Пусть O_2 – центр окружности ω_2 (рис.11). Так как проведенные из точки C касательные к окружности ω_2 равны, то $\angle O_2CA = \angle O_2CB$. Поскольку эти углы вписаны в окружность ω_1, то равны ее дуги AO_2 и O_2B и стягивающие их хорды. Следовательно, точки A и B симметричны друг другу относительно линии центров.

7. Нет. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 20000 и $1/10000$. Его площадь равна 1. Предположим, что его можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат. Тогда сторона этого квадрата равна 1. Разобьем катет длины 20000 на 1000 равных отрезков точками $A_0, A_1, \ldots, A_{1000}$. По принципу Дирихле какие-нибудь две из этих точек попадут в одну часть. Но расстояние между любыми двумя из перечисленных точек не меньше 20, а расстояние между любыми двумя точками квадрата не превосходит $\sqrt{2}$ – противоречие.

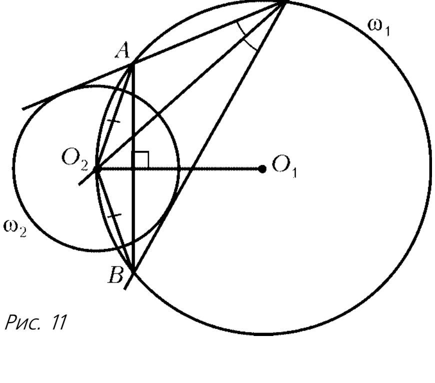


Рис. 11

Комментарий. В 1807 году венгерский математик В.Бойяи (Bolyai) доказал удивительную теорему: любые два многоугольника равной площади равносоставленны (т.е. один можно разрезать на несколько частей и собрать из них второй). Возникает естественный вопрос: как определить, какое минимальное количество частей требуется для двух конкретных многоугольников? Данная задача показывает нетривиальность вопроса – даже для треугольника и квадрата количество частей заранее неограниченно.

8. Так как у Сени и Жени получились одинаковые числа, то цифра, не выписанная Сеней, совпадает с цифрой, не выписанной Женей.

Пусть между точками на окружности, с которых Сеня и Женя начинали выписывать свои числа, расположена $k - 1$ цифра. Тогда из сказанного следует, что поворот окружности на k цифр совмещает каждую цифру с равной ей. Пусть m – наименьшее ненулевое число с таким свойством. Разделим n на m с остатком: $n = m \times q + r$. Легко видеть, что поворот на r цифр тоже переводит каждую цифру в равную ей. Так как $r < m$, то $r = 0$, т.е. n делится на m.

Теперь Сеня и Женя могут разрезать окружность на дуги, содержащие по m цифр, таким образом, что записанные на дугах цифры будут образовывать одинаковые числа.

Комментарий. В основе задачи лежит следующий факт. Пусть дана периодическая последовательность с минимальным периодом n, в которой содержатся два одинаковых участка длины $n - 1$. Тогда их начальные символы находятся на расстоянии, кратном n.

9. Да, существует. Это четырехугольник, у которого три угла по 45°, а четвертый 225° (тогда тангенсы всех его углов равны 1).

Комментарий. Можно показать, что условие задачи определяет углы четырехугольника однозначно.

10. Пусть точки имеют координаты $(x_1, P(x_1))$ и $(x_2, P(x_2))$, где $x_1 \neq x_2$. Тогда расстояние между ними равно

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (P(x_1) - P(x_2))^2} = |x_1 - x_2|\sqrt{1 + \left(\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\right)^2}.$$

Поскольку $x_1^n - x_2^n$ при любом натуральном n делится на $x_1 - x_2$, а коэффициенты многочлена $P(x)$ целые, то $m = (P(x_1) - P(x_2))/(x_1 - x_2)$ – целое число. Из формулы для расстояния следует, что число $m^2 + 1$ рациональное, а значит, и целое (как корень из целого). Поскольку число вида $m^2 + 1$ является полным квадратом только при $m = 0$, то $P(x_1) = P(x_2)$, что равносильно утверждению задачи.

11. Нет, не всегда. Вот контрпример. Пусть в коробку $2 \times 2 \times 3$ помещены два бруска $1 \times 2 \times 3$. Немного уменьшим у одного из них измерение длины 3, а у другого – измерение длины 2. Так как у второго бруска одно измерение равно 3, высоту коробки уменьшить нельзя. Так как высоты обоих брусков больше 2, их можно ставить в коробку только вертикально. Ясно, что изменить взаимное расположение брусков нельзя. Поэтому горизонтальные размеры коробки также нельзя уменьшить.

Выясните самостоятельно, изменится ли ответ в задаче, если у каждого бруска уменьшаются два измерения из трех.

12. а) Так как $200 > 2^7$, то достаточно доказать следующее: если число цветов n, а число точек не меньше 2^n, то первый игрок может гарантировать себе выигрыш.

При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для $n - 1$ цвета, докажем его для n. Разобьем точки на два множества, состоящие не менее чем из 2^{n-1} точек каждое. В каждом из множеств покрасим отрезки в $n - 1$ цвет в соответствии с индуктивным предположением. Все отрезки, соединяющие точки из разных множеств, покрасим оставшимся цветом. Если в каком-то из двух множеств нет точек, покрашенных в последний цвет, то искомый отрезок существует по предположению индукции. Если же в обоих множествах есть точки последнего цвета, то соединяющий их отрезок – искомый.

б) Докажем, что утверждение верно уже для 121 точки. Занумеруем точки парами чисел (a, b), где a и b – числа от 1 до 11. При $k = 0,\ldots,9$ отрезки между точками вида (a_1, b_1) и (a_2, b_2), где $(a_2 - a_1) - k(b_2 - b_1) \vdots 11$, покрасим цветом $k + 1$. Если две точки соединены с третьей отрезками некоторого цвета, то между собой они соединены отрезком того же цвета. При этом для любых a_1, b_1, b_2 существует ровно одно a_2 такое, что отрезок между (a_1, b_1) и (a_2, b_2) покрашен в данный цвет. Поэтому для каждого цвета точки разбиваются на 11 множеств по 11 точек, все отрезки между которыми покрашены в данный цвет. Теперь покрасим оставшиеся отрезки произвольным образом. Как бы второй игрок ни покрасил точки, найдутся 12 точек одного цвета.

Рассмотрим разбиение на 11 множеств, соответствующее этому цвету. Найдутся две точки, попавшие в одно множество. Соединяющий их отрезок – искомый.

13. Рассмотрим на доске «большой» клетчатый квадрат со стороной 105 и разобьем его на 25 «малых» квадратов 21×21. Центр занумерованной клетки, находящийся на расстоянии менее 10 от центра некоторого малого квадрата, обязан находиться в этом малом квадрате, поэтому найдется хотя бы 25 клеток с числами. Наименьшее из них отличается от наибольшего более чем на 23. Соответствующие две клетки находятся на расстоянии менее 150, поскольку лежат в квадрате 105×105

14. Если $ABCD$ – вписанный четырехугольник, то он перейдет в равный четырехугольник за три операции. Любой допустимый четырехугольник перейдет в равный ему четырехугольник за 6 операций.

Действительно, пусть O – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ – углы, образованные сторонами четырехугольника a, b, c, d с отрезками AO, BO, CO, DO (рис. 12). Нетрудно видеть, что при применении операции к четырехугольнику точка O остается на месте, стороны располагаются в таком порядке: d, b, c, a, и к ним соответственно примыкают углы α_8 и α_7, α_3 и α_4, α_5 и

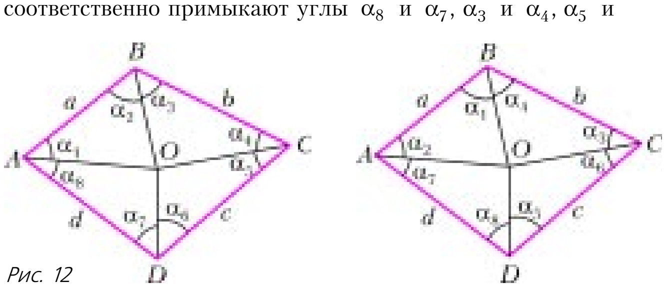


Рис. 12

α_6, α_2 и α_1, так что четырехугольник остается выпуклым. После применения трех операций стороны четырехугольника опять стоят в исходном порядке: a, b, c, d, а углы расположены как на рисунке 13.

Если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то O – центр описанной окружности, $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_6 + \alpha_7 = \alpha_5 + \alpha_8$, и за 3 операции четырехугольник перейдет в равный ему.

Для любого допустимого четырехугольника после 6 операций стороны и углы опять расположены в прежнем порядке (см. рис. 12).

Примечание. Если сразу оговорить, что допустимый четырехугольник – вписанный, то для ответа на первый пункт задачи достаточно проследить за сторонами четырехугольника, поскольку вписанный в данную окружность четырехугольник однозначно определяется длинами и порядком расположения сторон.

15. Пусть осталось $k \geq 1$ неразгаданных точек $c_{k,1}, \ldots, c_{k,k}$. Начертим на листе бумаги отрезок прямой l, не пересекающий отмеченный круг. На этом отрезке укажем такие $k + 1$ точек $a_{k,1}, \ldots, a_{k,k+1}$, что $a_{k,j}$ лежит строго между $a_{k,j-1}$ и $a_{k,j+1}$ для всех $j = 2, \ldots, k$.

Пусть Миша назвал для этих точек расстояния $d_{k,1}, \ldots, d_{k,k+1}$ соответственно. Найдем с помощью циркуля и линейки точки $b_{k,j+1}$ ($j = 1, \ldots, k$), которые лежат по ту же сторону от l, что и отмеченный круг, и отстоят от $a_{k,j}$ и $a_{k,j+1}$ на расстояния $d_{k,j}$ и $d_{k,j+1}$ соответственно (те индексы j, для которых это невозможно, мы пропускаем).

По принципу Дирихле найдутся две точки $a_{k,j}$ и $a_{k,m}$, для которых ближайшей из неразгаданных является одна и та же точка $c_{k,i}$. Нетрудно показать, что для любой точки из отрезка $[a_{k,j}; a_{k,m}]$, и в частности для $a_{k,j+1}$, точка $c_{k,i}$ также является ближайшей из неразгаданных. Тогда $c_{k,i}$ совпадает с $b_{k,j+1}$. Таким образом, не более чем за $2k + 1$ попытку можно разгадать одну из неразгаданных точек.

При $n = 1$ единственная неразгаданная точка определяется описанным способом за $3 < (n+1)^2$ попытки. Предположим, что $n - 1$ неразгаданных точек можно разгадать менее чем за n^2 попыток, и пусть загадано n точек. Разгадаем одну из них вышеописанным способом не более чем за $2n + 1$ попытки. Тогда, с учетом предположения индукции, все точки могут быть разгаданы менее чем за $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ попыток. Утверждение доказано.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

8 класс

1. Нужно долить слой жидкости высотой 3 см.

2. См. таблицу:

t, °C	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p, 10^5 Па	1,12	1,06	1,02	1,00	1,00	1,00	1,02	1,05	1,11

3. $\dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{\rho r v S}{cm} \approx 0{,}5$ град/с.

9 класс

1. $F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5$ Н. **2.** $F = \mu(v - u)$.

3. $\dfrac{a_\alpha}{a_\gamma} \approx \sqrt[3]{\dfrac{1-\varepsilon}{2}} \approx 0{,}788$. **4.** $I_р = 6{,}6$ мА; $I_и = 13{,}2$ мА.

10 класс

1. $\alpha_m = \operatorname{arctg}\dfrac{\mu L}{2L - \mu h}$, при этом должно выполняться условие $\mu < \dfrac{L}{h}$; на ведущих колесах должен создаваться крутящий момент $M = \dfrac{\mu m g R L}{\sqrt{(2L - \mu h)^2 + (\mu L)^2}}$. **2.** $k_{общ} = k\sqrt{5}$.

3. $U_в = \mathcal{E}$ при $\mathcal{E} < U_0$ и $U_в = \dfrac{\mathcal{E} R_1 + U_0 R_2}{R_1 + R_2}$ при $\mathcal{E} > U_0$; $U_в = \mathcal{E}$.

4. $S = \dfrac{\pi R^2 H_1 (H_1 + 2H_2)}{H_2^2}$.

11 класс

1. $F = mg\left(1 + \dfrac{m_2}{2m_1}\right) = 88$ Н. **2.** $t = \dfrac{1}{\sqrt{kg}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\mu_0}{v_0}\sqrt{\dfrac{g}{k}}\right)\right)$.

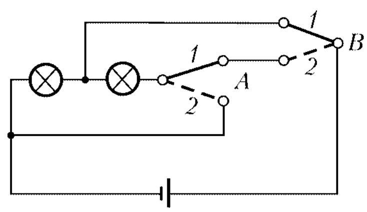
3. $\Delta T = \dfrac{T}{5}\left(\sqrt{1 + \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{\Delta p}{p}\right)^2} - 1\right)$.

4. $q_1 = C_1U = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл. **5.** $\mathscr{E} = (n-1)U$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $v_1 = 20$ м/с, $v_2 = 10$ м/с, $L = 500$ м.
2. $Q = 67$ кДж. **3.** См. рис.14.



№	A	B	Результат	
1	2	2	●	●
2	1	1	⊗	●
3	2	1	⊗	⊗
4	1	2	◐	◐

● – *лампа не горит* ⊗ – *лампа горит*
◐ – *лампа горит в полнакала*

Рис. 14

9 класс

1. $R_{п} = \dfrac{nL}{\sqrt{n^2-1}}$, $R_{з} = \dfrac{L}{\sqrt{n^2-1}}$. **2.** $\alpha = 45°$.

3. $q = \dfrac{\pi D^2 d^2 T}{4V}\sqrt{\dfrac{2gH}{D^4 - d^4}} \approx 3090$ ведер в час (здесь $T = 1$ ч).

4. $v = \dfrac{\alpha n_0 d}{\tau}$.

10 класс

1. $a = \dfrac{2F - (M+m)g}{2M+m}$.

11 класс

1. $\mu > \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}35$. **2.** а) $K = \dfrac{Q_1}{T_1} + \dfrac{Q_3}{T_3} - \dfrac{Q_1 + Q_3}{T_2} > 0$;

б) $K < 0$; в) $K = 0$. **3.** $L = \dfrac{g}{\omega^2}\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$.

НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

6. 1) $|5x-1| + |3-7x| - 4 + \big||5x-1| - |3-7x| - 2\big| < 0$;

2) $4 - |5x-1| - |3-7x| + \big||5x-1| - |3-7x| - 2\big| < 0$;

3) $|5x-1| - |3-7x| - 2 + \big||5x-1| + |3-7x| - 4\big| < 0$;

4) $|3-7x| - |5x-1| + 2 + \big||5x-1| + |3-7x| - 4\big| < 0$;

5)–8) *Указание.* Приведите в совокупности неравенства к одному виду, далее воспользуйтесь упражнением 2 и утверждениями 4 и 5.

7. 1) $\left[\sqrt{6}; \infty\right)$; 2) $\left(-\infty; \sqrt{6}\right] \cup \{0\} \cup [1/4; \infty)$;

3) $\{-1\} \cup [3; \infty)$; 4) $(-3; 3) \cup (12; \infty)$;

5) $\left(-\infty; \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \{1\} \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}; \infty\right)$;

6) $\left[\dfrac{-7-\sqrt{33}}{2}; -3\right] \cup \{-2\}$.

8. 1) $(-\infty; -6) \cup (0; \infty)$; 2) $\{1\} \cup [2; 10]$;
3) $(-\infty; \infty)$; 4) $\{-1\}$; 5) $x \neq 2$.

9. $\varnothing$. **10.** $[6p+3; p-2]$ при $p \le -1$; $\varnothing$ при $-1 < p < 0$.

11. *Указание.* В координатной плоскости (u, v) постройте, например, два геометрических места точек: неравенства $\big|v + 2|u|\big| + |u| - 6 \le 0$ и системы

$$\begin{cases} (v+2u) + u - 6 \le 0, \\ (v-2u) - u - 6 \le 0, \\ -(v+2u) + u - 6 \le 0, \\ -(v-2u) - u - 6 \le 0 \end{cases}$$

и установите причины их несовпадения.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Е.Я.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»; тел.: 930-56-48; e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»
Заказ №
Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91
При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10