Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2006» или «Ф2013». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2006 и М2009 предлагались на XXXII Всероссийской олимпиаде школьников по математике. Задача М2008 предлагалась на математической олимпиаде ФМЛ 239 Санкт-Петербурга.

Задачи Ф2013–Ф2017 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М2006–М2010, Ф2013–Ф2017

М2006. График линейной функции касается графика квадратичной функции $y = f(x)$, а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вниз на величину p. Найдите p.

Н.Агаханов

М2007. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. На отрезках AI и IC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC$.

Л.Емельянов

М2008. Назовем делитель числа n маленьким, если он не превосходит $n/10000$, и большим – в противном случае. Конечно ли множество чисел, у которых произведение всех больших делителей, отличных от самого числа, равно произведению всех маленьких?

А.Голованов

М2009. Даны $n > 1$ приведенных квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + b_1, \ldots, x^2 - a_nx + b_n$, причем все $2n$ чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ различны. Может ли случиться, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ является корнем одного из этих трехчленов?

А.Бадзян

М2010*. Для натуральных чисел m и n обозначим через $F(m, n)$ количество всех связных клеточных фигур в прямоугольнике $m \times n$. Докажите, что четность числа $F(m, n)$ совпадает с четностью числа $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$. (Связная клеточная фигура – это такое непустое множество клеток, что из любой клетки этого множества можно пройти в любую другую клетку этого множества по клеткам этого множества, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)

А.Бадзян

Ф2013. На горизонтальной плоскости сидит лягушка. Навстречу ей издалека катится барабан радиусом R. Центр барабана движется со скоростью v. С какой наименьшей скоростью должна подпрыгнуть лягушка, чтобы перепрыгнуть барабан, слегка коснувшись его только в верхней точке? Размерами лягушки можно пренебречь.

М.Ромашка

Ф2014. В системе, изображенной на рисунке 1, массы всех трех грузов одинаковы и равны m. Нить, соединяющая грузы *1* и *2*, невесома и нерастяжима; ее участки, не лежащие на блоках, вертикальны или горизонтальны; блоки невесомы; трения нет. Груз *3* движется по горизонтальной плоскости не опрокидываясь. Найдите ускорения всех трех грузов. Ускорение свободного падения равно g.

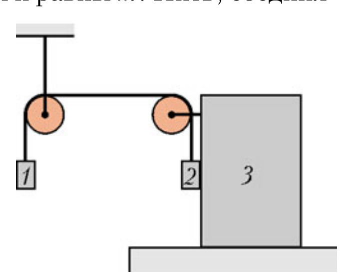

Рис. 1

М.Семенов

Ф2015. Найдите сопротивление между клеммами A и B цепи, изображенной на рисунке 2 и состоящей из

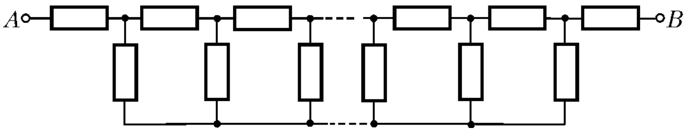

Рис. 2

бесконечного числа одинаковых резисторов с сопротивлением R каждый.

Д.Харабадзе

Ф2016. Во всех точках кривой A, изображенной на рисунке 3, потенциал электрического поля, созданного неподвижными точечными зарядами $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = 1$ нКл, равен $\varphi = 900$ В. Определите расстояние l между зарядами. Постоянная в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

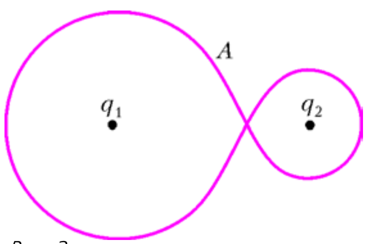

Рис. 3

И.Горбатый

Ф2017. В воду с показателем преломления $n_в$ частично погружена тонкая стеклянная плосковыпуклая линза, причем ее плоская сторона горизонтальна и находится под водой, а толщина линзы H (рис.4). На эту систему вертикально падает параллельный пучок света. На глубинах l и $L > l$ в воде возникают два одинаково ярких изображения. Каковы радиус R выпуклой поверхности линзы, показатель преломления n материала линзы и глубина h ее погружения в воду? Отражением света от воды и от линзы, а также поглощением света пренебречь.

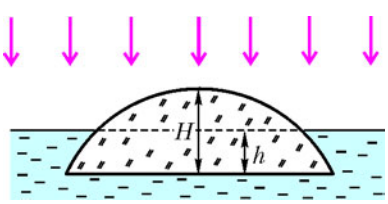

Рис. 4

С.Варламов, М.Семенов

Решения задач М1981–М1990, Ф1998–Ф2002

М1981. *В клетках таблицы 11×11 расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша – произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?*

Ответ: не могли.

Из 13 чисел 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113 (это простые числа из промежутка [61;121]) найдутся два числа p и q, расположенные в одной строке. Значит, в наборе чисел Димы есть число A (произведение чисел этой строки), которое делится на pq. С другой стороны, существует единственный столбец (а именно, столбец, содержащий число p), произведение чисел которого делится на p. Но в этом столбце нет числа q, поэтому в наборе чисел Саши отсутствует число A.

С.Берлов

М1982. *На экране написано натуральное число. Каждую секунду к написанному в данный момент числу прибавляется произведение цифр его десятичной записи. Докажите, что начиная с некоторого момента число на экране не будет изменяться.*

Сначала докажем следующую **лемму**: *найдется такое натуральное k_0, что при $k > k_0$ любое k-значное число более чем в 10 раз превосходит произведение своих цифр.*

Доказательство. Любое k-значное число не меньше 10^{k-1}, а произведение его цифр не больше 9^k; поэтому достаточно, чтобы для k выполнялось неравенство

$$10^{k-1} > 10 \cdot 9^k, \text{ или } \left(\frac{10}{9}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^k > 100.$$

Пользуясь *неравенством Бернулли* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ при $x \geq -1$ и любом натуральном n (это неравенство нетрудно доказать индукцией по n), получаем, что при $k > k_0 = 900$ неравенство $\left(1 + \frac{1}{9}\right)^k > 100$ верно. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Если на экране возникло число, у которого в десятичной записи есть ноль, то с этого момента число не будет изменяться. Предположим противное – пусть в десятичной записи чисел $a_1, a_2, \ldots$, последовательно появляющихся на экране, нет нулей. Тогда последовательность $a_1, a_2, \ldots$ строго возрастает. Зафиксируем некоторое натуральное $k > k_0$ такое, что $10^k > a_1$, и найдем в последовательности $a_1, a_2, \ldots$ последнее число a_m, которое меньше 10^k, т.е. $a_m < 10^k \leq a_{m+1}$. Согласно лемме, произведение цифр числа a_m меньше $\frac{a_m}{10} < 10^{k-1}$, поэтому

$$a_{m+1} < a_m + 10^{k-1} < 10^k + 10^{k-1}.$$

Неравенства

$$10^k \leq a_{m+1} < 10^k + 10^{k-1}$$

показывают, что a_{m+1} – это $(k+1)$-значное число, причем его первая цифра единица, а вторая ноль. Противоречие.

А.Белов

М1983. *Сколько существует разных способов разбить число 2006 на натуральные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.*

Ответ: 2006.

Докажем, что для каждого целого k от 1 до 2006 число 2006 можно разбить ровно на k приблизительно равных слагаемых, причем единственным способом. Отсюда будет следовать решение.

Заметим, что в каждом разбиении натурального числа на k приблизительно равных слагаемых найдется не более двух разных слагаемых, т.е. несколько ($x > 0$ штук) слагаемых равны m, а остальные ($y \geq 0$ штук) равны $m+1$. Имеем: $x + y = k$, $2006 = m \cdot x + (m+1) \cdot y = m \cdot k + y$.